

Raisonnements Mathématiques

L'analyse Synthèse :

« Méthode de détermination de l'ensemble des solutions d'un problème et de rédaction d'une démonstration de cette solution »

On commence par analyser les hypothèses, on utilise les propriétés, théorèmes, méthodes... que l'ont peut déduire de ces hypothèses → On fait ensuite la synthèse en appliquant les propriétés, théorèmes, méthodes... afin de donner une solution au problème.

Exemples :

- Résoudre une équation, inéquation
- Déterminer le maximum, minimum d'un fonction.
- Démontrer que des droites, plans... sont parallèles, orthogonales...
- Démontrer que des événements sont ou ne sont pas indépendants.
- ...

Raisonnement par l'Absurde :

On doit démontrer que « si A est vraie, alors B est vraie ». Le principe consiste à supposer que B est fausse puis d'aboutir à une contradiction ($0 = 1$...)

Exemples :

- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \neq 0$ ou $e^x > 0$.
- Montrer que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, si n n'est pas premier, alors n admet un diviseur inférieur ou égal à \sqrt{n} .
- Montrer que l'ensemble des nombres Premiers est infini
- ...

Raisonnement par disjonction de cas :

Consiste à « découper » l'ensemble sur lequel doit se faire la démonstration en plusieurs groupes disjoints.

Exemples :

- Montrer que le produit de 2 entiers consécutifs est un nombre pair.
- Déterminer un cycle de congruences.
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
- Résolution d'une équation, inéquation avec valeurs absolues.
- ...

Utilisation d'un contre-exemple

Consiste à trouver un exemple pour lequel une propriété annoncée vraie est fausse.

Exemples :

- Montrer qu'une suite n'est pas géométrique.
- Montrer qu'une suite, fonction, n'est pas convergente

Raisonnement par Contraposée

Repose sur le principe de *logique mathématique* suivant : « si A est vraie, alors B est vraie » est équivalent à « si non B est vraie, alors non A est vraie » (ou encore « si B est fausse, alors A est fausse »).

Remarque : B est une condition nécessaire à A

« S'il pleut, alors le sol est mouillé » \Leftrightarrow « si le sol n'est pas mouillé, alors il ne pleut pas »

Exemples :

- Si $xy = 0$, alors $x = 0$ ou $y = 0$
- Si n^2 pair, alors n pair.
- Démontrer qu'un triangle dont on connaît les longueurs n'est pas rectangle.
- Si $m \times n$ est impair, alors m et n sont impairs
- ...

Raisonnement par récurrence :

Permet de démontrer qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel n à partir d'un certain rang n_0 .

Principe :

Soit (P_n) , une propriété définie $\forall n \geq n_0$.

Initialisation : Si P_{n_0} est vraie (on le vérifie).

Hérédité : Si, pour $k \geq n_0$ fixé, « P_k est vraie » (Hypothèse de Récurrence) implique « P_{k+1} est vraie ».

Alors, on peut conclure que $\forall n \geq n_0$, (P_n) est vraie.

Exemples :

- Montrer qu'une suite récurrente est majorée, minorée, croissante, décroissante...
- Déterminer l'écriture explicite d'une suite récurrente.
- Démontrer qu'une expression est un multiple d'un entier donné
- ...