

Sommes de Variables Aléatoires

Loi de probabilité d'une Variable Aléatoire - Rappels

Définir une loi de probabilité de X revient à associer à chacune des valeurs x_i de X , la probabilité de l'issue e_i telle que $p(X = x_i) = p_i$.

$X = x_i$	x_1	x_2	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Propriétés

Formule de König-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Transformation affine :

Linéarité de l'espérance : $E(aX + b) = aE(X) + b$

Variance : $V(aX + b) = a^2V(X)$

Écart-type : $\sigma(ax + b) = |a|\sigma(X)$

Linéarité de l'espérance :

$$E(aX + b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b)p_i = \sum_{i=1}^n (ax_i p_i + bp_i) = a \sum_{i=1}^n \overbrace{(x_i p_i)}^{E(X)} + b \sum_{i=1}^n \overbrace{(p_i)}^1$$

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Variable aléatoire

Définir une variable aléatoire X sur l'ensemble $\Omega = \{e_1; e_2; e_3; \dots; e_i; \dots; e_n\}$ revient à définir une fonction de Ω dans \mathbb{R} qui associe à chaque valeur e_i de Ω un nombre réel x_i

Ω	e_1	e_2	...	e_n
$X(\Omega)$	x_1	x_2	...	x_n

Espérance, Variance, Écart-type d'une variable aléatoire

Espérance : $E(X)$ représente la moyenne des valeurs de X

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_n \times p_n$$

Variance : $V(X)$ mesure la moyenne des écarts à la moyenne au carré

$$V(X) = \sum_{i=0}^n (x_i - E(X))^2 p_i$$

Écart-Type : $\sigma(X)$ mesure la dispersion autour de la moyenne

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Rappels

Preuves

Formule de König-Huygens :

$$V(X) = \sum_{i=0}^n (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_{i=0}^n (x_i^2 - 2x_i E(X) + (E(X))^2) \times p_i$$

$$V(X) = \sum_{i=0}^n (x_i^2 p_i - 2x_i p_i E(X) + p_i (E(X))^2)$$

$$V(X) = \sum_{i=0}^n \underbrace{(x_i^2 p_i)}_{E(X^2)} - 2E(X) \sum_{i=0}^n \underbrace{(x_i p_i)}_{E(X)} + (E(X))^2 \sum_{i=0}^n \underbrace{(p_i)}_{=1}$$

$$V(X) = E(X^2) - 2E(X) \times E(X) + E(X)^2 \times 1$$

$$V(X) = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Sommes de Variables Aléatoires

Cas de deux variables aléatoires X et Y

Linéarité de l'espérance $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

⚠ En général : $V(X + Y) \neq V(X) + V(Y)$

Si X et Y sont indépendantes :

$$\forall (x; y) \in X(\Omega) \cap Y(\Omega), P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x) \times P(Y = y)$$

Propriétés

$$E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Cas Particulier de la Loi Binomiale

X_i La variable de Bernoulli telle que $X_i \in \{s; e\}$ dont la probabilité du succès s vaut : $P(X_i = s) = p$

$$E(X_i) = p \quad V(X_i) = p(1 - p) \quad \sigma(S_n) = \sqrt{np(1 - p)}$$

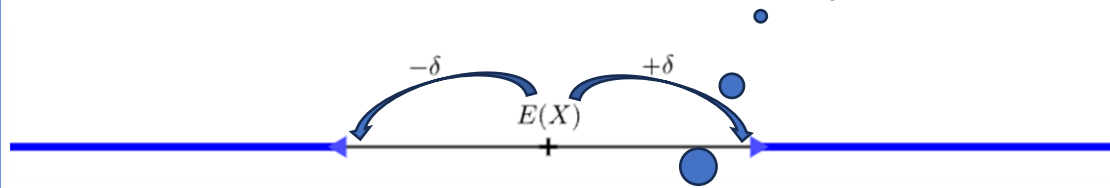
Si $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ alors $X \rightarrow B(n; p)$ alors

$$E(X) = np \quad V(X) = np(1 - p) \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$$

Concentration et Loi des Grands Nombres

Inégalité de Markov : $P(X \geq \delta) \leq \frac{E(X)}{\delta}$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$



Cette inégalité
majore la dispersion
autour de la moyenne

On répète n fois, de manière identique l'épreuve aléatoire de variable aléatoire X .

On obtient n variables aléatoires X_1, \dots, X_n vérifiant $E(X_i) = E(X)$ et $V(X_i) = V(X)$

→ **Moyenne empirique** : $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$

→ **Inégalité de la concentration** : $P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2}$

→ **Loi des grands nombres** : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq \delta) = 0$

« Pour tout réel $\delta > 0$, aussi petit soit-il, la limite de la probabilité que M_n s'écarte de la moyenne de plus de δ est nulle. »